Maths en Jeans

Le calcul avec le boulier

INFO SUR L'ARTICLE

Cet article a été rédigé en décembre 2019 par :

Saida Guezoui, Lilia Mares, Nedjima Meziane et Melissa Haddad, étudiantes en licence 3 « mathématiques ».

Mots clés :

Boulier chinois

Ordinateur

Opération

Machine à registre

Machine de Turing

ABSTRACT

This work aims to show that an imaginary "infinite" abacus can be compared to a computer. First, we exposed the algorithms for performing the four elementary numerical operations and the extraction of square and cubic roots with a Chinese abacus. Then, the approach used for the infinite abacus is to compare it to two machines very close to the computer: the Turing machine and the register machine. Respectively, a binary abacus having an infinite number of rods and an abacus having an infinite number of beads on each rod are considered and the results of the calculations agree with those of the two machines.

RÉSUMÉ

L'objectif de ce travail est de montrer qu'un boulier imaginaire « infini » peut être assimilé à un ordinateur. En premier lieu, nous avons exposé les algorithmes permettant de réaliser les quatre opérations numériques élémentaires sur les nombres décimaux et l'extraction des racines carrées et cubiques avec un boulier chinois. Ensuite, l'approche utilisée pour le boulier infini est de le comparer à deux machines très proches de l'ordinateur : la machine de Turing et la machine à registre. Respectivement, un boulier binaire ayant un nombre infini de tiges et un boulier ayant un nombre infini de boules sur chaque tige sont considérés et les résultats des calculs concordent avec ceux des deux machines.

Introduction

A l'origine du développement des machines à calculer, tout le mérite revient à l'ancêtre de l'ordinateur appelé le boulier ou « Abaque ». Son histoire remonte à environ 2500-3000 ans avant J.C.

Le boulier a connu un succès indéniable dans les civilisations passées et était d'une grande aide au calcul à travers les époques, il a été utilisé par les Grecs, les Égyptiens, les Indiens, et notamment par les Chinois, les Japonais et les Russes.

Un abaque est formé d'un cadre rectangulaire muni de tiges sur lesquelles coulissent des boules. Il fonctionne sur la base du système de numérotation décimale. En effet, il existe deux grandes catégories de boulier : le boulier à base décimale (10 boules) à l'instar du boulier russe et le boulier à bases alternées (5 boules et 2 boules pour chaque base) comme les bouliers chinois et japonais.

Dans ce travail, nous cherchons à répondre à la question : le boulier infini est-il un ordinateur ? Dans un premier temps, on étudie les différentes opérations qu'on peut effectuer avec un boulier, à savoir : l'addition, la soustraction, la multiplication, la division, et l'extraction des racines carrées et cubiques. Ensuite, en se basant sur l'hypothèse selon laquelle le boulier peut être assimilé à une machine de Turing et à une machine à registre on pourra comparer l'abaque à un ordinateur.

Matériel et méthode

La première partie de travail consiste à réaliser les opérations d'addition, soustraction, multiplication et division de nombres décimaux ainsi que l'extraction des racines carrée et cubique d'un nombre en utilisant un boulier chinois à base alternée (Fig. 1).

Les calculs ont été réalisés en suivant la méthodologie décrite dans le manuel de Nabil Mjid (Le boulier chinois-Guide pratique, 2017) qui détaille en particulier la méthode d'extraction de la racine cubique.

Le boulier chinois appelé « Suanpan » est composé de deux parties séparées par une barre de lecture. La partie supérieure nommée « **les quinaires** » et comporte sur chaque tige deux boules qui valent le chiffre 5 chacune tandis que la partie inférieure appelée « **les unaires** » comporte 5 boules qui valent Le chiffre 1 chacune. Les tiges du boulier dont le nombre varie généralement entre 7 et 15 permettent le passage des unités au dizaines, centaines, milliers…etc, ainsi, de droite à gauche, les chiffres sont décuplés. Le boulier japonais, dont l'utilisation est similaire au boulier chinois, est simplifié par l'omission des boules supérieures de chaque partie.

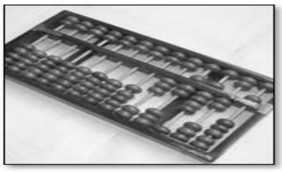

Figure1 : Boulier chinois

L'affichage des nombres sur un boulier chinois est basé sur le principe du décuplement ou multiplication par 10, des chiffres portés sur les tiges. A titre d'illustration, le nombre 65210 dans le système décimal est la somme de 0 unité, 1 dizaine, 2 centaines, 5 milliers, 6 dizaines de milliers. Sa représentation sur le boulier, illustrée dans la figure 2 ci-dessous.

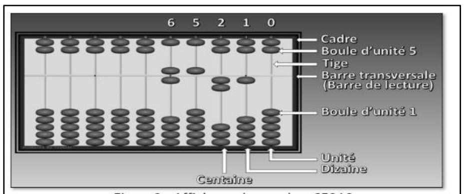

Figure2 : Affichage du nombre 65210

Résultats :

A. Opérations sur le boulier :

Dans cette partie, nous présentons des algorithmes de calcul avec le boulier, qui nous permettrons de comparer l'abaque à une machine de Turing et une machine à registre pour enfin l'assimiler à l'ordinateur.

1. Addition

Pour effectuer l'addition, il faut préalablement afficher les deux nombres à additionner. L'affichage s'effectuant toujours en allant de droite à gauche lorsque l'on passe des unités aux dizaines et centaines. L'un des nombres est affiché à droite du boulier et l'autre nombre est affiché à gauche.

L'addition est effectuée en suivant le même algorithme utilisé pour l'addition habituelle sur papier : additionner les unités, ensuite les dizaines, …etc.

2. Soustraction

Pour soustraire un nombre à un autre il suffit de présenter le plus grand sur le boulier à droite et l'autre à gauche. La soustraction se fait en enlevant les valeurs, colonnes par colonne, de droite à gauche. Lorsque toutes les colonnes ont été traitées, l'opération est terminée.

3. Multiplication

La technique consiste à poser le multiplicande à droite du boulier et le multiplicateur à gauche. Pour réaliser l'opération, multiplier chacune des colonnes du multiplicande de gauche à droite par chaque chiffre constituant le nombre multiplicateur.

La seule particularité de cette opération, c'est la multiplication par deux chiffres. Soit par exemple le nombre **ab** tel que a est le chiffre des unités et b des dizaines (*idem* pour le nombre **cd**). Après avoir positionné le nombre **ab** à gauche du boulier et **cd** à droite, on effectue la multiplication **a** x **c**, on affiche le résultat dans la tige qui succède **c,** ainsi on fait **b** x **c**, le résultat est affiché sur la tige de **c**, puis on multiplie **a** par **d** et on positionne le résultat sur la tige **c** et enfin **b** x **d**, le résultat est affiché sur la tige d. L'algorithme est donc terminé.

4. Division :

La règle de division avec un boulier s'appuie sur la méthode décimale, dont la démarche est enseignée dans les écoles primaires.

Au milieu du boulier on choisit une tige à partir de laquelle on représente le résultat de l'opération. A droite, on représente le dividende qui évoluera au cours du calcul et à gauche, on positionne le diviseur.

L'opération consiste à diviser les premiers chiffres du dividende par le diviseur. Le résultat est inscrit au milieu du boulier et le reste de cette première division remplace les chiffres correspondants du dividende et on recommence l'opération autant de fois que cela est possible.

5. Racine carrée

La racine carrée d'un nombre réel positif X est le nombre positif Y dont le carré est égal à X.

Pour l'extraire avec le boulier :

- On positionne le nombre dont on veut extraire la racine carrée à droite du boulier.
- On identifie les tranches de 2 chiffres composant ce nombre de droite à gauche. On appelle X la valeur de la tranche de travail en cours (la première tranche la plus à gauche). Cela est nécessaire uniquement si notre racine contient plus de deux chiffres.
- On appelle N la valeur de la racine intermédiaire, placée à gauche du boulier. Cette valeur va évoluer au fur et à mesure des opérations.

Etape 1 : Placer 1 sur la première colonne à gauche et retirer 1 à la première tranche X, ici N = 1.

Etape 2 : Calculer (2*N+1) et comparer le résultat avec X.

- Si X > (2*N+1) alors on soustrait (2*N + 1) à X et (X-(2* N + 1)) devient la nouvelle tranche de travail en cours. Enfin on ajoute 1 à N pour avoir une nouvelle racine intermédiaire.
- Si X < (2*N + 1), l'opération peut continuer en décalant la tranche en cours de 2 tiges vers la gauche. Ensuite on calcule N*10 pour déterminer la nouvelle racine intermédiaire.

On répète l'étape 2 jusqu'à obtenir le résultat avec la précision souhaitée après la virgule. La racine est donc le nombre de soustraction qu'on applique à notre nombre dont on cherche la racine carrée.

6. Racine cubique « parfaite » :

Il s'agit simplement d'une méthode qui s'appuie sur l'encadrement de la racine, en effet on commence par séparer notre nombre en deux tranches. Soit X la première qui représente la tranche de gauche et Y la tranche de droite.

En utilisant la table des cubes ($n^{3)}$ et des racines cubiques correspondantes (n) des nombres entre 0 et 9, on arrive à encadrer le nombre X entre deux racines cubiques, on prend donc le n^3 le plus petit et on considère le n correspondant comme le chiffre des dizaines de notre racine cubique.

Pour trouver le chiffre des unités de notre racine cubique, on choisit le n^3 qui a le même chiffre des unités que Y et on considère le n correspondant comme chiffre des unités de la racine recherchée.

Les calculs effectués dans les sections précédentes peuvent être réalisés sur des nombres jusqu'à l'ordre de 10^{14} où le boulier ordinaire trouve ses limites. Nous nous proposons d'imaginer un boulier infini et de tester sa capacité et ainsi trouver à quelle condition qu'on pourrait l'assimiler à un ordinateur.

Discussion : Le boulier infini est-il un ordinateur ?

Le « boulier infini » est un boulier qui pourrait avoir une infinité de tiges ou bien une infinité de boules sur chaque tige.

B.1. Premier cas : un boulier ayant une infinité de tiges. Peut-on l'assimiler à une machine de Turing ?

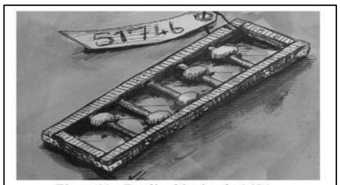

Figure11 : Boulier binaire de 1624

Un boulier avec une infinité de tiges sert à manipuler des nombres à base 10 ou à base 2 (binaire). Dans le cas de la base binaire, la boule peut avoir deux positions : en haut si elle vaut 1 ou en bas si elle vaut zéro. La figure 11 représente un abaque binaire datant de 1624.

Exemple de l'addition avec un boulier binaire :

La figure 12 montre les étapes de l'addition de 11111 et 1101 (31 et 13 respectivement en base décimale).

On peut distinguer 3 cas possibles dans l'addition binaire :

1. 0+0 sans retenue, 0+1 sans retenue
2. 0+0 avec retenue et 1+1 avec retenue
3. 1+1 avec retenue.

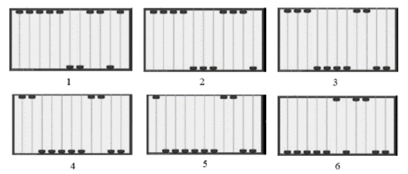

Figure 12 : Addition de 11111 et 1101 avec un abaque binaire

1. On affiche le nombre binaire 11111 à gauche du boulier et 1101 à droite.

2. On additionne les unités 1 avec 1 ce qui donne 10 en binaire donc on rajoute 1 sur la 2ème tige et on affiche 0 sur la première.

3. On additionne 1 de la 2ème tige avec le 1 de la 8ème tige (2e bit du nombre à gauche) pour avoir encore 10, cette fois-ci on retient qu'on a 1 comme retenue pour la prochaine addition.

4. On additionne 1 de la 3ème tige avec le 1 de la 9ème tige (3e bit) pour avoir encore 10 plus la retenue de l'étape 3, ça nous donne donc 11, on affiche 1 sur la 3ème tige et on retient à nouveau 1.

5. On additionne 1 de la 4ème tige avec le 1 de la 10ème tige (4e bit) pour avoir encore 10 plus la retenue de l'étape 4, ça nous donne donc 11, on affiche 1 sur la 4ème tige et on retient 1 pour la dernière étape.

6. On additionne le 0 de la 5ème tige avec le 1 de la 11ème tige (5e bit) qui fait 1 plus la retenue 1 on obtient 10.

D'où le résultat de notre addition : 101100 soit 44 en base décimale.

On voit bien qu'avec un boulier binaire, on est capable de faire des opérations sur les nombres binaires tel que puisse être fait avec une machine de Turing et avec l'ordinateur. Pour des nombres plus grands, il nous faudrait un nombre plus important de tiges. La validité et la fiabilité du boulier binaire nous permet, lorsque le nombre de tiges est infini, d'effectuer comme l'ordinateur les opérations sur de très grands nombres.

Machine de Turing :

Les machines de Turing ont été inventées par Alain Turing qui a publié sa théorie dans un article célèbre en 1936 considéré comme l'un des articles fondateurs de l'informatique moderne.

Cette machine est un automate fini d'états permettant le passage d'un état initial à un état final grâce aux transitions en se souvenant de l'état actuel à un instant donné. On peut effectuer des opérations sur des nombres binaires avec cet automate telle division par 2, illustrée par la figure 14.

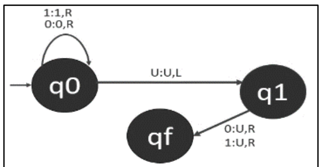

Figure 14 : Machine de Turing qui divise par 2

La figure 14 est une illustration d'un automate d'une machine de Turing qui effectue la division par 2.

En effet, cet automate comporte trois états : un état initial q0, un état intermédiaire q1 et un état final qf, qui sont reliés par des transitions. Par exemple, la transition (U : U, L) signifie que si on lit un vide, on écrit un vide et on se déplace à gauche.

Cet automate fini de la machine de Turing est matérialisé, contrairement à celui du boulier qui n'est pas matérialisé car il représente le manipulateur lui-même. En effet, il doit faire quelques raisonnements comme les retenues, tables de multiplication et se souvenir de quelle tige a-t-il multipliée par une autre notamment dans le cas d'une multiplication par deux chiffres.

Donc si le manipulateur du boulier sera en mesure de mémoriser la liste des états de la machine de Turing et dans quel état il est, ce qui est le cas, car si on prend l'exemple de la multiplication par deux chiffres, le manipulateur est capable de retenir à quel moment il faut rajouter ou afficher et sur quelle tige. A ce moment-là, on pourrait assimiler le boulier infini à une machine de Turing qui fait des calculs sur des nombres binaires exactement tel un ordinateur en termes de calculabilité même si d'une manière moins efficace concernant la vitesse. Finalement le boulier infini est un ordinateur dans ce cas.

B.2. Deuxième cas : un boulier ayant une infinité de boules sur chaque tige. Peut-on dans ce cas l'assimiler à une machine à registre ?

Les machines à registres sont introduites par **Shepherdon** et **Sturgis** en 1963. Il existe plusieurs modèles de machines à registre (MR). Nous utilisons un modèle réduit de ces machines :

- La mémoire d'une MR est composée d'un nombre virtuel infini de registres (R1, R2, …). Un registre peut contenir un entier naturel quelconque. Si l'entier contenu dans Ri est nul, on dit qu'il est vide. A l'instant donné, il n'y a qu'un nombre fini de registres non vides.

- Les seules opérations possibles sur les registres sont l'incrémentation d'un registre donné et la décrémentation d'un registre donné si le registre n'est pas vide.

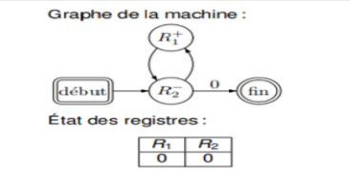

Figure 15 : Graphe d'une machine à registre

- Le programme est représenté par un graphe orienté fini illustré par la figure 15. Ce graphe G (V, E) étiqueté contient :

- Deux sommets particuliers qui correspondent respectivement au début et à la fin des calculs :
  - $V_{début}$ de degré entrant nul et de degré sortant 1. Ce sommet est appelé l'état initial de la machine.
  - V_{fin} de degré sortant nul. Ce sommet est appelé l'état final de la machine.
- Les autres sommets sont tous étiquetés par un entier n regroupés en 2 catégories :

  R_k^+ : ajouter 1 au contenu du registre.

  R_k^- : soustraire 1 au contenu du registre si ce registre n'est pas vide.

La figure 16 illustre une machine à registre qui comporte deux registres A et B tel que A contient 5 jetons. Dans ce cas, la soustraction consiste à prendre des jetons de A et les mettre dans B jusqu'à ce qu'on aurait soustrait le nombre souhaité qui sera dans B et le résultat final après la soustraction sera le nombre de jetons restés dans A.

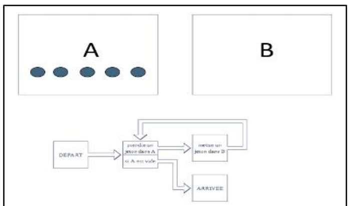

Figure 16 : Machine à registre

Avec une infinité de jetons, on pourra effectuer plusieurs opérations à l'aide de cette machine.

Cette configuration d'une machine à registre avec une infinité de jetons est similaire au boulier défini précédemment qui a une infinité de boules sur chaque tige. Ainsi, cette similitude nous permet de dire que l'on est capable de faire n'importe quelle opération sur des grands nombres comme le feraient les machines à registre.

Dans un ordinateur, le processeur accède aux instructions du programme à exécuter ainsi qu'aux données nécessaires à son exécution depuis la mémoire.

Il existe une hiérarchie des mémoires informatiques : les plus rapides sont les plus coûteuses, donc en nombre limité, et placées le plus près du processeur (les **registres** font partie intégrante du processeur). Les plus lentes sont les moins coûteuses et sont éloignées du processeur (Figure 17).

Cette place primordiale que trouvent les registres dans le fonctionnement des ordinateurs par leur rôle fondamental dans les calculs binaires effectués par le processeur, permet d'assimiler un ordinateur à une machine à registre.

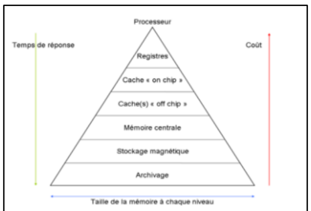

Figure 17 : Hiérarchie mémoire d'un ordinateur

Compte tenu des équivalences, d'une part entre une machine à registre et un boulier ayant un nombre infini de boules, et d'autre part entre un ordinateur et une machine à registre et de la conclusion de l'étude du premier cas où nous avons montré qu'un boulier ayant une infinité de tiges est assimilable à une machine de Turing, nous pouvons enfin conclure quant à une possibilité d'assimiler un boulier infini à un ordinateur.

Conclusion :

Ce travail a porté sur la recherche méthodologique concernant l'utilisation de l'instrument de calcul mathématique qu'est le boulier. La concurrence des outils de calculs pouvant manipuler des grands nombres avec le boulier nous amène à tester la capacité d'un boulier « imaginaire » infini. Nous avons étudié deux cas de boulier infini : un boulier avec un nombre infini de tiges que nous avons comparé à une machine de Turing. Le deuxième cas porte sur un boulier ayant une infinité de boules sur chaque tige, comparé à une machine à registre.

La concordance des résultats obtenus avec un boulier binaire avec ceux obtenus avec une machine de Turing et avec un ordinateur suggère la possibilité d'assimiler un boulier avec un nombre infini de tiges à un ordinateur.

De même, la robustesse de l'équivalence d'une machine à registre, base du processeur d'un ordinateur, avec un boulier ayant un nombre infini de boules sur chaque tige permet de comparer les deux sans difficulté.

Les deux cas étudiés séparément, nous suggérons de comparer un boulier infini ayant un nombre infini de tiges qui auraient chacun un nombre infini de boules avec un ordinateur.

Remerciements :

Merci à Laurent Beddou et Julien Cassaigne pour leur encadrement et leur aide pour l'organisation des animations.
Merci au CIRM pour l'accueil et à ses chercheurs pour leurs informations et orientations précieuses.
Merci à madame Peretti, enseignante au collège Thiers de Marseille qui nous a accueilli lors de notre animation.

Bibliographie :

Notre site internet : www.saida-gue.simplesite.com

http://therese.eveilleau.pagesperso-orange.fr/pages/truc_mat/textes/boulier.htm
http://histoiredechiffres.free.fr/compter/bouliers%20compteurs.htm
http://irem.univ-reunion.fr/IMG/pdf/Boulier_trijen.pdf
https://fr.wikibooks.org/wiki/S%27initier_au_boulier_en_10_le%C3%A7ons
https://sites.google.com/site/joetlhistoriquedelinformatique/conditions/demande-de-sponsoring
https://www.nippon.com/fr/ncommon/contents/japan-topics/163939/163939.jpg « japonais »
https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/e/ea/Boulier1.JPG « chinois »
https://i.etsystatic.com/6006220/r/il/96aa30/586849830/il_570xN.586849830_48a4.jpg « russe »
Registres.pdf de Yves Lafont